

MEM-253: Αριθμητική Επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων Ασκήσεις στις πεπερασμένες διαφορές

Άσκηση 1 Έστω u η λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών, με $a, b > 0$,

$$\begin{cases} -x^2 u''(x) - x u'(x) + 4u(x) = 20x^3, & x \in J = [1, 2], \\ u(1) = u(2) = 0. \end{cases}$$

1. Διατυπώστε ένα διακριτό σχήμα χρησιμοποιώντας την κεντρική διαφορά για την προσέγγιση της πρώτης παραγώγου και την κεντρική διαφορά για την προσέγγιση της δεύτερης παραγώγου.
2. Ποιος είναι ο περιορισμός για το βήμα h , ώστε ο αντίστοιχος πίνακας που χρησιμοποιούμε για την προσέγγιση της λύσης να είναι αντιστρέψιμος;

Άσκηση 2 Έστω u η λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών, με $a, b > 0$,

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x), & x \in J = [0, 1], \\ au(0) + bu'(0) = c, & u(1) = 0 \end{cases}$$

1. Διατυπώστε ένα διακριτό σχήμα με τοπικό σφάλμα διακριτοποίησης τάξης ακρίβεια δυο.
2. Γράψτε τη μέθοδο σε μορφή γραμμικού συστήματος.

Άσκηση 3 Αποδείξτε τα παρακάτω

1. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Taylor, αποδείξτε ότι

$$u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})) = h^2 u''(x_i) + \frac{1}{12} h^4 u''''(x_i) + \eta_i.$$

και ότι

$$u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})) = \frac{1}{12} h^2 (u''(x_{i+1}) + 10u''(x_i) + u''(x_{i-1})) + \tilde{\eta}_i,$$

όπου $\max\{|\tilde{\eta}_i|, |\eta_i|\} \leq Ch^6$, με C ανεξάρτητη του h .

2. Αν υποθέσουμε ότι n u ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση $u'' = F(x, u)$, χρησιμοποιήστε το παραπάνω αποτέλεσμα για να καταλήξετε στη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών

$$-(U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1})) = \frac{h^2}{12} (F_{i+1} + 10F_i + F_{i-1}),$$

με $F_i = F(x_i, u(x_i))$.

3. Διατυπώστε τη μέθοδο, όταν $F(x, u) = f(x) - q(x)u$. Γράψτε τη μέθοδο σε μορφή γραμμικού συστήματος.

Άσκηση 4 Θεωρούμε το πρόβλημα

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(D(x) \frac{d}{dx} u(x) \right) + u(x) = f(x), & x \in J = [0, 1], \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

με D μια ομαλή θετική συνάρτηση. Γράψτε ένα αριθμητικό σχήμα με τοπικό σφάλμα διακριτοποίησης τάξης ακρίβειας δύο. Εκφράστε τη μέθοδο και σε μορφή γραμμικού συστήματος.